

**Επαναληπτικά Διαγωνίσματα στα Μαθηματικά
Προσανατολισμού της Γ' Λυκείου από το Askisopolis
2025 - 2026**

ΑΣΚΗΣΟ ΠΟΛΙΣ



www.askisopolis.gr

**Ο πιο πλούσιος κόσμος
θεμάτων και ασκήσεων**

est. 2014

Αντώνης Βαλέργας	Γαβριήλ Ελευθερίου
Αποστόλης Κακαβάς	Νίκος Κουμάντος
Στέλιος Μιχαήλογλου	Άγγελος Μπλιάς
Θανάσης Νικολόπουλος	Βαγγέλης Ραμαντάνης
Δημήτρης Πατσιμάς	Νίκος Σαμπάνης
Βαγγέλης Τόλης	Νίκος Τούντας
	Ισαάκ Χιονίδης

**2ο Διαγώνισμα στα Μαθηματικά Προσανατολισμού της Γ' Λυκείου
από την ομάδα του Ασκησόπολις**

Διάρκεια: 3 ώρες

Υλη: Συναρτήσεις – Όρια

Θέμα Α

A1. Να διατυπώσετε το κριτήριο παρεμβολής.

3 μονάδες

A2. Να αποδείξετε ότι για οποιοδήποτε πολώνυμο $P(x)$, ισχύει $\lim_{x \rightarrow x_0} P(x) = P(x_0)$, με $x_0 \in \mathbb{R}$.

5 μονάδες

A3. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

«Για κάθε συνάρτηση f ορισμένη κοντά στο 1, αν ισχύει $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1} = \ell \in \mathbb{R}$ τότε $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0$ ».

α) Είναι αληθής ή ψευδής η πρόταση;

β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α).

1 + 3 = 4 μονάδες

A4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Δεν υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(P(x) \eta \mu \frac{1}{x} \right)$, όπου $P(x)$ μη σταθερό πολώνυμο.

β) Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ τότε το $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)}$ ισούται με $-\infty$ ή $+\infty$.

γ) Είναι $|\eta \mu x| < |x|$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$.

δ) Ισχύει ότι $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$ αν και μόνον αν $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \ell$.

ε) Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) > 0$, τότε $f(x) > 0$ κοντά στο x_0 .

10 μονάδες

A5. Να επιλέξετε την σωστή απάντηση. Το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(-x^{10} - x + 1)^{202} - x + 1}{(x^{1010} - x^3 + x)^2 - 2}$ είναι ίσο με:

A) -1

B) $+\infty$

Γ) 0

Δ) $-\infty$

E) 1

3 μονάδες

Θέμα Β

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x^3 + x$, $x \in \mathbb{R}$ και $g(x) = \sqrt{x}$, $x \geq 0$.

B1. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και λύσετε την εξίσωση $f(x) = 0$.

3 μονάδες

B2. Να ορίσετε την συνάρτηση $h = g \circ f$.

4 μονάδες

B3. Να υπολογίσετε τα όρια: **α)** $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{|f(x)-1| - x \left| x^2 + x - \frac{1}{x} + 1 \right| + 1}{|g(x)+1|}$

β) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{h(x) - x + f(x)}{x}$

$$\gamma) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{h(x) - \sqrt{x^3}}{f(x)}$$

$$\delta) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{xg(x) + f(x)}{h(x)}$$

4 + 3 + 3 + 4 = 14 μονάδες

B4. Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\lambda - 1)x^4 + f(x)}{\lambda x^2 + x}$ για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$.

4 μονάδες

Θέμα Γ

Γ1. Να αποδείξετε ότι $\frac{1 - \sin x \sin 2x}{x^2} = \frac{1 - \sin x}{x^2} \sin 2x + \frac{1 - \sin 2x}{x^2}$ για κάθε $x \neq 0$.

2 μονάδες

Γ2. Να αποδείξετε ότι :

$$\alpha) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sin x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

$$\beta) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sin x \sin 2x}{x^2} = \frac{5}{2}$$

$$\gamma) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - \sin x \sin 2x}{x^2} = 0$$

3 x 3 = 9 μονάδες

Γ3. Αφού αποδείξετε ότι είναι καλά ορισμένο το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{1 - \sin x \sin 2x}$ να το υπολογίσετε.

7 μονάδες

Γ4. Να υπολογίσετε τα όρια:

$$\alpha) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{x^4} + 1} - \frac{1}{x^2}}$$

$$\beta) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2 - 2\sin x - x^2}{\eta \mu x^2} \cdot \eta \mu \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{x^4} + 1} - \frac{1}{x^2}} \right)$$

3 + 4 = 7 μονάδες

Θέμα Δ

Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία γνωρίζουμε ότι υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow 1} f^2(x)$ και ισχύει ότι:

$$f(x) = x + \lim_{x \rightarrow 1} f^2(x) - 3 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Δ1. Αφού αποδείξετε ότι το $\lim_{x \rightarrow 1} f^2(x)$ είναι πραγματικός αριθμός, στη συνέχεια να βρείτε τους δυνατούς τύπους της f .

6 μονάδες

Για τα επόμενα ερωτήματα θεωρήστε ότι $f(x) = x + 1$, $x \in \mathbb{R}$.

Δ2. Έστω συνάρτηση $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι $f(x)g(x) - x > 1$ για κάθε $x \neq -1$.

Αν γνωρίζετε ότι το $\lim_{x \rightarrow -1} g(x)$ είναι πραγματικός αριθμός, να αποδείξετε ότι $\lim_{x \rightarrow -1} g(x) = 1$.

6 μονάδες

Δ3. Να λύσετε την εξίσωση $|\eta \mu f(x)| - 1 = x$.

6 μονάδες

Δ4. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $h(x) = f^3(x)$, $x \in \mathbb{R}$ αντιστρέφεται και να βρείτε την h^{-1} .

7 μονάδες

Κάθε επιτυχία!